Получив решение для атома водорода, физики тут же стали его проверять экспериментально. Первое, что они проверили – энергетические уровни. И, конечно, они были в восторге, потому что в нулевом приближении теория с $1/n^2$ сошлась с экспериментом.

Но были два челика, Штерн и Герлах, которым нужно было писать диплом. И они задумались (в рамках своей темы диплома, конечно), а что ещё они могут померить. Им пришла идея: есть состояния с ненулевой проекцией момента импульса на какую-то ось. А электрон у нас заряженный. Это значит, что в атоме существует некий ток, создающий магнитный момент.

Из курса электрода известно т.н. гиромагнитное соотношение, связывающее момент импульса и магнитный момент:

$$\overline{m} = \frac{q}{2\pi c}\overline{L}$$

Нам, правда, оно будет удобно в виде проекции:

$$m_z = \frac{q}{2\pi c} L_z$$

(Доказывается, оно, правда, исключительно для классических частиц).
Штерн и Герлах на него так посмотрели и решили его адаптировать для квантовой механики. Теперь вместо m_z и L_z будут операторы $\hat{m}_z$ и $\hat{L}_z$.
С размерным оператором момента импульса работать неудобно, перейдём к безразмерному:

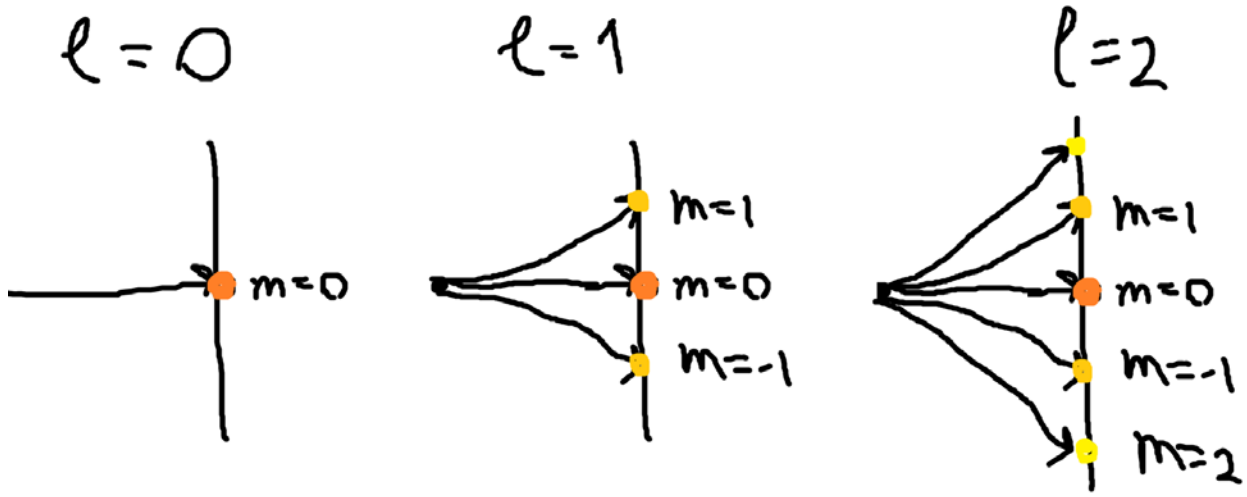
$$\hat{m}_z = \frac{|e|\hbar}{2mc}\hat{l}_z$$

Вот так идеально.

Ну и т.к. $\hat{m}_z$ прямо пропорционально $\hat{l}_z$, то и СЗ у них будут одни и те же. У $\hat{l}_z$ были СЗ {-*l*, -*l*+1, …, -1, 0, 1, …, *l*-1, l} – а у $\hat{m}_z$ будут те же самое, просто домноженные на константу $\frac{|e|\hbar}{2mc}$, которую впоследствие назвали магнетоном Бора.
Теперь понятно, почему m называется магнитным квантовым числом – уровни энергии от него не зависят, а вот магнитный момент – очень даже.

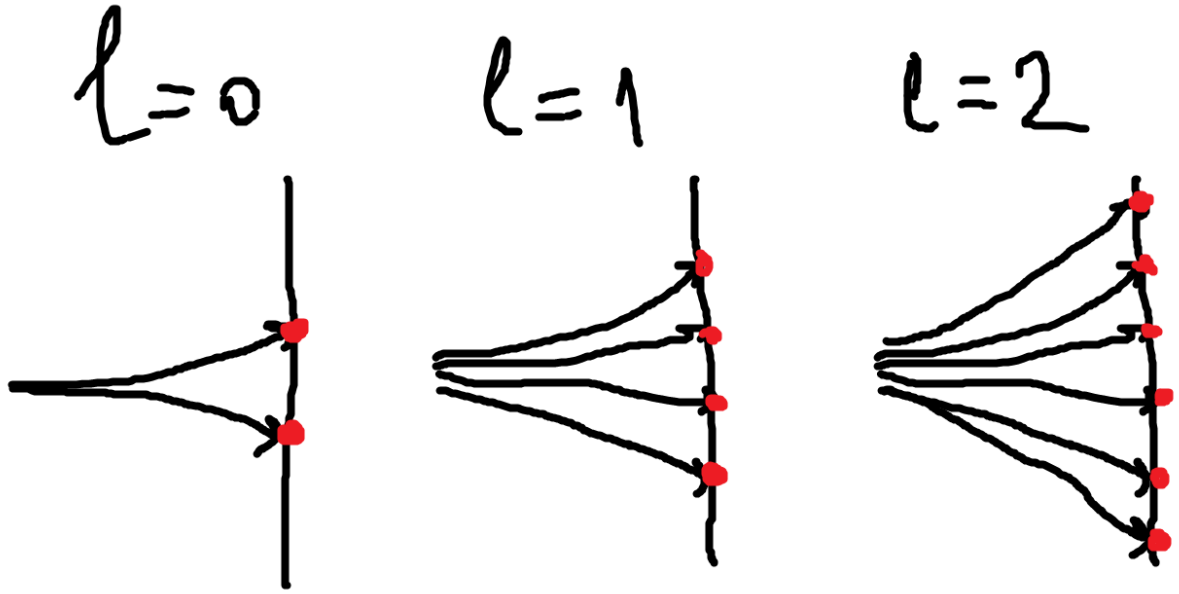
Т.к. научник Штерна и Герлаха потребовал, чтобы они ещё провели эксперимент, они решили всё это добро проверить. Они надыбали источник

летящих атомов водорода (замечание: в реальном опыте Штерна-Герлаха был отнюдь не водород, но позже эксперимент был уже повторён другими челами специально для водорода), неоднородное магнитное поле и светящийся экран.
В результате действия неоднородного магнитного поля на атомы эти атомы чуть-чуть смещаются от прямой линии. И Штерн с Герлахом ожидали увидеть на экране пятна:



Чем больше магнитное число m, тем сильнее бы атом бы уклонялся от прямой линии.
Для разных *l* мы имели бы разное число возможных m. Понятно, что наиболее жирным было бы пятно в центре, потому что оно возможно при всех *l*, два пятна поодаль были бы ощутимо послабее, потому что они возможны во всех состояниях, кроме основного (а оно самое вероятное) и т.д.

Эксперимент, разумеется, дал не то, что они ожидали. А именно:



Они видели два ярких пятна в центре, а не одно.

На первый взгляд кажется, что спин – это нечто абсолютное неестественное, придуманное только для объяснения данного эксперимента, какой-то безумный подгон вроде «т.к. у меня на праке по механике момент инерции не совпал с теоретическим, я дополню теорию на сей счёт, введя собственный момент инерции имени меня самого». На самом деле если мы построим РЕЛЯТИВИСТСКУЮ квантовую механику, напишем уравнение Дирака, то мы оттуда естественно получим существование спина.

Вот ещё одна аналогия. Помните, что Бор, пытаясь объяснить атом водорода, сказал, что существуют некие станционарные орбиты, на которых электрон не излучает энергию? С точки зрения классики это полный бред и подгон теории под эксперимент. А вот когда мы записали стационарное уравнение Шрёдингера и решили его для кулоновского потенциала, получили эти энергетические уровни и орбиты естественным путём.

Ну а пока что скажу, что спин вам будут нормально читать в 6-м семе. Но чуток мне придётся вам вперёд рассказать. Тем более что у вас в билетах спин-орбитальное взаимодействие. Итак, краткая (не очень, но короче не получится, тема и так сложная) выжимка 6-го семестра:

ВФ спиновой частицы записывается как производение координатной функции (КФ) на спиновой столбец:

$$\Psi(x,y,z)\cdot\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Привычные нам операторы (координаты, импульса, гамильтониан, момента импульса, $\hat{a}^+$ и $\hat{a}$) действуют только на пространственную составляющую, оставляя спиновый столбец неизменным.
Матричные операторы (вроде матриц Дирака и их производным), напротив, считают Ψ(x,y,z) постоянным множителем, а меняют числа в столбце (мы увидим в дальнейшем, как они работают). За счёт того, что КФ Ψ(x,y,z) будет постоянным коэфом, а все уравнения линейными, мы можем везде на КФ сокращать, и работать только со спиновым столбцом.

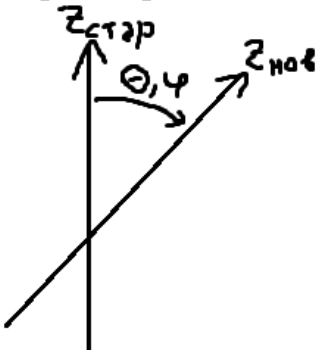
Поэтому нам в условиях задачи и будут давать только этот самый спиновый столбец $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$- потому что именно на него будут действовать все спиновые операторы.

А что такое эти числа a и b какой у них физический смысл?

Пусть у нас есть сферическая СК. Вообще в каждой сферической СК числа в столбце будут свои. Пускай в нашей они равны a и b Тогда:
$|a|^2$ – вероятность измерить значение проекции спина на ось Z +1/2

$|b|^2$ – вероятность измерить значение проекции спина на ось Z -1/2
(При этом в каждой СК оказывается, что $|a|^2+|b|^2=1$ – естественно, сумма вероятностей всегда =1. Или ½, или -1/2 – третьего не дано!).

А что, если нам нужно измерить проекцию спина на другую ось – не ось Z? Очевидно, нужно повернуть СК так, чтобы новая ось Z совпала с осью, где мы хотим измерить проекцию.
Поворот определяется двумя углами, θ, φ:



А как же преобразуется спиновой столбец? Он матрично умножается на матрицу поворота. Вот он:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & e^{-i\varphi}\sin\theta \\ e^{i\varphi}\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

Давайте вспомним, как действует матрица на вектор: они матрично перемножаются (помните правило «строка на столбец» с 1 курса?)

Посмотрите, какой будет результат:

$$\begin{pmatrix} a\cos\theta & be^{-i\varphi}\sin\theta \\ ae^{i\varphi}\sin\theta & -b\cos\theta \end{pmatrix}$$

Сверху будет вероятность того, что измеренная проекция спина будет ½, снизу = -1/2.

Обращаю ваше внимание, что у спинора всего 2 числа: сверху и снизу. Этим он резко отличается от привычных нам обычных векторов с тремя компонентами.
А ещё компоненты его комплексные. Да, такой он, этот спинор…

А где же матрицы Паули? А вот смотрите: как-то математикам пришла в голову интересная идея: записать три матрицы Паули друг на друга:

$$\begin{bmatrix} \hat{\sigma}_1 \\ \hat{\sigma}_2 \\ \hat{\sigma}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

Получился вот такой вот вектор из матриц (или, как мы будем говорить, матричный вектор). Общепринятого названия у него нет, я буду его называть матричным вектором Паули.

Обозначается он как $\vec{\hat{\sigma}}$. Да, и крышечка, и стрелочка – потому что это не простой вектор, а матричный, он из матриц состоит!

Его иногда путают со спиновым вектором-столбцом $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Не путайте. $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ - очень полезный вектор всего из двух чисел (правда, комплексных), полностью описывающих спин фермиона.

В чём отличия? $\vec{\hat{\sigma}}$ же, во-первых, уродлив донельзя (сравните $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ и монструозный вид $\vec{\hat{\sigma}}$), а во-вторых, не может описывать спин никакой системы по той простой причине, что он константа. Матрицы Паули же постоянны, и $\vec{\hat{\sigma}}$ вместе с ними.
Ещё есть очень похожий матричный вектор $\hat{\boldsymbol{s}}$, который равен $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ с точностью до константы: $\hat{\boldsymbol{s}} = \frac{\hat{\boldsymbol{\sigma}}}{2}$. Соответственно, $\hat{s_x} = \frac{\hat{\sigma}_x}{2}$, $\hat{s_y} = \frac{\hat{\sigma}_y}{2}$, $\hat{s_z} = \frac{\hat{\sigma}_z}{2}$.

Ни $\hat{\boldsymbol{s}}$, ни $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ нет в ВФ, зато они могут быть в гамильтониане:

$$i\hbar \frac{\partial \vec{s}}{\partial t} = \hat{H}\vec{s}$$

Это то же самое, что

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \hat{H}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Гамильтониан $\hat{H}$ должен иметь вид матрицы 2x2. Вот только вот чтобы её найти, придётся попотеть.
Спиновой столбец у частицы может долго не меняться. Координатная ВФ там дрыгается, а спиновому столбцу $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ всё пофиг. Но есть причина, которая может заставить спиновый столбец меняться – магнитное поле (B_x,

B_y, B_z). Тогда гамильтониан имеет смысл энергии спина в этом магнитном поле. Считается он по формуле:

$$\hat{H} = -\mu \hat{\vec{\sigma}} \vec{B} = -\mu \sum_{i=1}^{3} B_i \hat{\sigma}_i$$

Где:

μ – магнетон Бора – такая размерная физическая постоянная,

$\hat{\sigma}_i$ - матрицы Паули

$\hat{\vec{\sigma}}$ - наш знакомый, матричный вектор Паули – вот он где используется!

Напомню, что это $\begin{bmatrix} \hat{\sigma}_1 \\ \hat{\sigma}_2 \\ \hat{\sigma}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$

Обратите внимание – я дал две формулы для вычисления матрицы гамильтониана: с матричным вектором Паули и со знаком суммы. Для вычислений гораздо удобнее вторая, однако ваш семер мог вам писать только первую. Знайте, что вторая лучше ☺

Её, кстати, можно записать ещё наглядней, расписав знак суммы:

$$\hat{H} = \mu \left(B_x \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + B_y \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} + B_z \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right)$$